指標層の特性サイクルについて (概均質ベクトル空間の研究)

AUTHOR(S):

面田, 康裕

数理解析研究所講究録 1238 巻 2001 年 174-177

指標層の特性サイクルについて

明石高専 面田康裕 (Yasuhiro Omoda)
Akashi National College of Technology

1 序

ここで紹介する結果は名古屋大学の行者先生との共同研究により得られたものです。様々な問題意識や数学的背景等多くのことを御教授頂き、またこうした研究集会での発表の機会を与えて頂いたことにかんして、行者先生に感謝の意を表したいと思います。
G.Lusztig は、代数閉体上の被約代数群 G の指標の幾何学的理論であり、有限体上の対応する群 $G(F_q)$ の既約指標の理論にできるだけ近いものとして指標層 (character sheaf) の理論を導入しました。Riemann-Hilbert 対応により指標層に対応するD－加群が得られますが、その特性多様体が大切な研究対象になります。本報告では、特に、冪零軌道の閉包にサポートを持つ cuspidal character sheaf [L1] の特性サイクルの決定についての結果 [G-O] を紹介します。

次章で随伴多様体の双対多様体の構造を調べた結果を述べ、その次の章で cuspidal character sheaf の特性サイクルの決定についての主結果を紹介します。

2 随伴多様体の双対多様体について

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の単純リー環、G を対応する単純代数群とし、$N(\mathfrak{g})$ により $\mathfrak{g}$ のベキ零元全体をあらわすとします。冪零元 $x \in N(\mathfrak{g})$ に対して、次のように定義される多様体を随伴多様体と呼ぶことにします。

$$X := \overline{AdG \cdot x}.$$

一般には射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対して、双対多様体 $\check{X}$ とは X に接している $\mathbb{P}^n$ の中の超平面の全体がなす集合のことです. この報告においては、随伴多様体 X の双対多様体 $\check{X}$ は $\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ の部分集合ですが、今後は、Killing form により $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視することで、$\mathfrak{g}$ の部分集合と考えましょう。

$$\check{X} \subset \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \ \textit{by} \text{ Killing form } (\ ,\ ).$$

この時、随伴多様体 X の双対多様体 $\check{X}$ は次のように表わされます。

$$\begin{aligned}\check{X} &= \overline{AdG\cdot\{y\in\mathfrak{g}|(y,[\mathfrak{g},x])=0\}}\\ &= \overline{AdG\cdot\{y\in\mathfrak{g}|([y,x],\mathfrak{g})=0\}}\\ &= \overline{AdG\cdot\{y\in\mathfrak{g}|[y,x]=0\}}\end{aligned}$$

随伴多様体 X の双対多様体 $\check{X}$ の構造について次のような結果が得られます。

Theorem 1. 冪零元 $x\in\mathfrak{g}$ に対して得られる随伴多様体 X の双対多様体 $\check{X}$ は以下のような構造を持つ。

$$\check{X}=\overline{AdG\cdot\{s+x|s\in\mathfrak{h}_x\}}.$$

ここで、 $\mathfrak{h}_x$ は x を含む極小 *Levi* 部分代数の中心を表わしています。

証明は、Dynkin-Kostant theory [C] を使ってなされます。[G-O]

冪零元 $x\in\mathfrak{g}$ が与えられたとき、x を含む $\mathfrak{g}$ の Levi subalgebra が唯一 $\mathfrak{g}$ 自身のみであるならば、x は distinguished であるといいます。
このとき次の系はすぐに得られます。

Corollary 1. 冪零元 $x\in\mathfrak{g}$ に対して得られる随伴多様体 X が自己双対である（*i.e.* $X=\check{X}$）のは x が *distinguished* であることと同値である。

3 指標層の特性サイクルについて

まず、特性多様体による指標層の特徴付けを思い出しましょう。

Theorem 2. *([Lu2])* K により *simple regular holonomic D-module* であって、その特性多様体 $SS(K)$ が

$$SS(K)\subset\bigcup_{O:nilpotent\ orbits}\overline{T^*_O\mathfrak{g}}$$

を満たしているものを表わしているとする。このとき、K が *cuspidal character sheaf* であることは、

$$\mathfrak{F}(K)=K$$

が満たされることと同値である。ここで $\mathfrak{F}$ は *Fourier transform* を表わしている。

ここでは、この特徴付けを cuspidal character sheaf の定義と考えることにしましょう。
K のサポートが冪零軌道 O の閉包 $\overline{O}$ であるとき、

$$\overline{O}=O_0(=O)\cup O_1\cup\cdots\cup O_s$$

ならば、ある部分集合 $0 \in \mathrm{I} \subset \{0, 1, \cdots, s\}$ が存在して、

$$SS(K) = \bigcup_{i_k \in \mathrm{I}} \overline{T^*_{O_{i_k}} \mathfrak{g}}$$

となっています。この部分集合 I を決定するのが目標です。

$$p : T^*\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$$

により、底空間への射影を表わしておきましょう。このとき、

$$p^{-1}(0) \cap SS(K) = p^{-1}(0) \cap \bigcup_{i_k \in \mathrm{I}} \overline{T^*_{O_{i_K}} \mathfrak{g}}.$$

であり、

$$p^{-1}(0) \cap \overline{T^*_{O_{i_K}} \mathfrak{g}} = \overline{\check{O}}_{i_K}.$$

なので、

$$p^{-1}(0) \cap SS(K) = \bigcup_{i_k \in \mathrm{I}} \overline{\check{O}}_{i_K}.$$

一方、$T^*\mathfrak{g}$ と $T^*\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ として同一視しておくと、

$$\overline{T^*_{O_{i_K}} \mathfrak{g}} = \overline{T^*_{\check{O}_{i_K}} \mathfrak{g}^*} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$$

であり、K が monodoromic sheaf である [G-O] ので、

$$SS(\mathfrak{F}K) = SS(K)$$

であり、よって、

$$SS(K) = \bigcup_{i_k \in \mathrm{I}} \overline{T^*_{O_{i_k}} \mathfrak{g}}$$

$$SS(\mathfrak{F}(K)) = \bigcup_{i_k \in \mathrm{I}} \overline{T^*_{\check{O}_{i_k}} \mathfrak{g}}.$$

このとき、K が cuspidal character sheaf であることより、

$$\mathfrak{F}(K) = K$$

を満たすので、

$$supp(\mathfrak{F}(K)) = supp(K)$$

これらをあわせると、

$$\bigcup_{i_k \in \mathrm{I}} \overline{\check{O}}_{i_k} = \overline{O}$$

であることがわかる。このとき *Theorem*1 より、$i_k \in \mathrm{I}$ ならば、O_{i_k} は distinguished である。実は、[Lu1] における cuspidal character sheaf with rank1 の分類により、それらのサポートとして出てくる冪零軌道は distinguished であるもののうちで closure relation に関して最小であることがわかります。よって、

$$\mathrm{I} = \{0\}.$$

であることがわかりました。これにより、次の定理が得られました。

Theorem 3. (O, L) により *[Lu1]* の意味での *cuspidal pair* を表わすことにする。L のランクは 1 であると仮定する。この時、特性多様体 $\mathrm{SS}(\mathrm{IC}(O, L))$ はちょうど余法束 $\overline{T_O^*\mathfrak{g}}$ に一致する。さらにその重複度は 1 である。(ここで $\mathrm{IC}(O, L)$ は (O, L) に付随する *IC*-複体を表わし、$\mathrm{SS}(\mathrm{IC}(O, L))$ は対応する正則ホロノミック D ー加群の特性多様体を表わしている。)

AKASHI NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

References

[C] R.Carter *Finite groups of Lie type.* Weily Interscience 1985

[D-G] J.Denef, A. Gyoja *Character sums associated to prehomogeneous vector spaces.* Compositio Math. 113 (1998),273-346

[G-O] A.Gyoja, Y.Omoda *Characteristic cycles of certain character sheaves.* to appear

[Lu1] G.Lusztig *Intersection cohomology complexes on a relative group.* Invent. Math. 75 (1984),205-272.

[Lu2] G.Lusztig *Fourier transforms on a semisimple Lie algebra over* $\mathbb{F}_q$. Lecture notes in Math 1271 (1987),177-188.